



NLS VE NLSM YÖNETİCİ DENKLEMLERİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Mahmut Bağcı¹ ve Nalan Antar²

¹İstanbul Bilgi Üniversitesi, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü, İstanbul

²İTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

GİRİŞ

Doğrusal olmayan dalgalar, fizik ve matematiğin alt disiplinlerinde önemli yer tutan bir konudur. Doğrusal olmayan dalga denklemlerinin çözümleri kararlı lokalize dalga (soliton) olabileceği gibi sınırlı zamanda (veya mesafede) patlayan (blow-up) veya çöken (collapse) sönümlü dalga olabilir.

Fiziksel yapısı (görünümü ve formu) bozulmadan sabit bir hızla yayılıp kendi kendini besleyen tekil dalgalara soliton denir. Solitonlar, fiziksel etkileşimler (çarpışma) sonucunda faz kayması dışında herhangi bir değişime uğramadan hareketlerine devam ederler. Literatürde birçok dalga denkleminin lokalize dalga çözümlerinin (soliton) olduğu kanıtlanmıştır. Bu dalga denklemlerine örnek olarak Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) veya **sinüs- Gordon** denklemi gösterilebilir [1-3].

MODEL

NLS denkleminin ikinci dereceden (kuadratik) katkılar dahil edildiğinde NLSM sistemi elde edilmektedir. NLSM Sistemi bir potansiyelin varlığında aşağıdaki şekilde tanımlanır [4].

$$iu_z + \frac{1}{2}\Delta u + |u|^2 u - \rho u \Phi - V(x, y)u = 0 \quad (1)$$

$$\Phi_{xx} + \nu \Phi_{yy} = \left(|u|^2\right)_{xx}$$

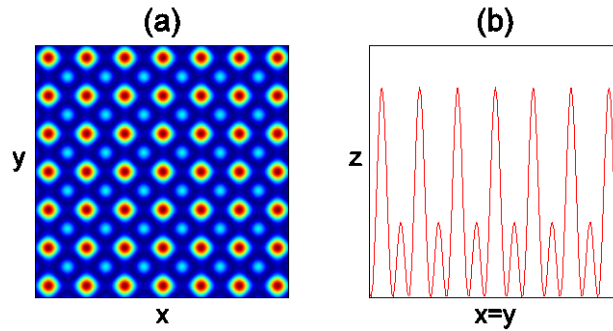
burada $u(x, y, z)$ birinci harmoniği, $\Phi(x, y)$ kuadratik etkileri göstermektedir. ρ ile ν kullanılan malzemenin (ortamın) fiziksel özelliklerine göre değişmektedir. $\rho < 0$ durumunda su dalgaları, $\rho > 0$ durumunda elektromanyetik dalga çözümleri elde edilir ($\rho = 0$ durumunda NLS denklemi elde edilir). $V(x, y)$ dış potansiyeli göstermektedir. Bu çalışmada düzenli, periyodik bir potansiyel kullanılmıştır [5].

Son zamanlarda düzenli ve düzensiz potansiyellerin varlığında NLS denkleminin soliton çözümleriyle ilgili çok sayıda çalışma yayınlanmıştır [1-3]. Fakat NLSM sisteminin bir dış potansiyelin varlığındaki çözümleri ile ilgili sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. NLS denklemi ve NLSM sistemlerinin yöneticiliğinde elde edilen çözümlerin dalga dinamiklerinin karşılaştırıldığı herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmada, NLS denklemleri ve NLSM sisteminde bir potansiyelin varlığında soliton çözümleri incelenip karşılaştırılmıştır. (1) denklemindeki periyodik $V(x, y)$ potansiyel aşağıdaki matematiksel formda tanımlanmaktadır [5].

$$V(x, y) = \frac{V_0}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k_x x + k_y y)} \right|^2$$

burada V_0 potansiyel derinliğini (genliğini) belirleyen katsayıdır. Potansiyel frekansı $k_x = k_y = 2\pi$ olarak belirlenmiştir. $N=2,3,4,6$ durumlarında düzenli periyodik potansiyeller, $N=5,7$ durumlarında yarı kristal potansiyeller elde edilmektedir. Bu çalışmada $N=4$ durumuna karşılık gelen periyodik potansiyel incelenecektir. Bu potansiyele ait üstten görünüş ve diyagonal kesit Şekil 1’de gösterilmiştir.



Şekil 1. Periyodik potansiyelin ($N=4$ için) (a) üstten görünüşü; (b) diyagonal kesiti.

SAYISAL YÖNTEM

Potansiyel eklenen NLS ve NLSM denklemlerinin kesin analitik çözümleri özel durumlar dışında elde edilememektedir. Bu nedenle ele alınan problemin sayısal yöntemlerle çözülmesi gerekmektedir. Bu denklem sistemlerini çözmek için literatürde Spektral Renormalizasyon (SR) metodu olarak bilinen Fourier transformu üzerine kurulu yöntem kullanılacaktır [5]. Çözüm elde etmek için NLSM sistemi Fourier uzayında ele alınıp, $u = f(x, y)e^{-i\mu z}$ çözüm önerisi ile doğrusal olmayan terime göre bir yakınsama faktörü belirlenir. Belirlenen bu yakınsaklık sınırına ulaşana kadar döngü yinelenir, bu çalışmada yakınsama koşulu 10^{-8} olarak belirlenmiştir.

Sayısal çözüm için kullanılan Gaussian başlangıç koşulu aşağıdaki şekildedir.

$$w_0(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-A[(x+x_n)^2 + (y+y_n)^2]} \quad (2)$$

Burada x_n, y_n solitonların potansiyel üzerindeki yerini, M soliton sayısını belirlemek için kullanılır. A değeri, solitonu potansiyel üzerinde belirlenen yere odaklamak için kullanılır.

Çalışmada, aksi belirtilmedikçe $\nu = 1$, $\mu = -1$, $A = 1$ ve (potansiyelin olduğu durumlar için) $V_0 = 12.5$ olarak kullanılmıştır.

KARARLILIK ANALİZİ

SR yöntemiyle temel solitonlar sayısal olarak elde edildikten sonra bu solitonların doğrusal olmayan kararlılıkları incelenmiştir. Soliton gücü, kararlılığın belirlenmesinde önemli bir yol göstericidir, bu nedenle kararlılık analizinin ilk aşamasında soliton güçleri belirlenmiştir. Vakhitov-Kolokolov (VK) kararlılık kriterlerine göre NLS denklemi solitonlarının kararlı olabilmesi için soliton gücünün (P), özdeğer (μ) arttıkça azalması (eğim koşulu) ve soliton gücünün kritik değer (P_c) olan 5.85'ten küçük olması gerekir [7].

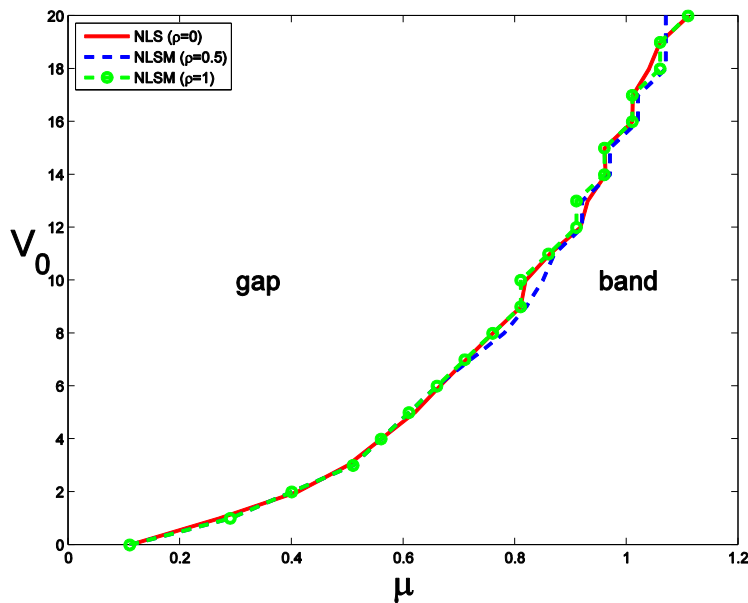
Güç analizi sonrasında NLSM denklemindeki ikinci derece türevler (u_{xx} ve u_{yy}) sonlu farklar yöntemiyle doğrudan çözülüp solitonlar dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemiyle ilerletilerek soliton kararlılığının sayısal analizi yapılmıştır [2,3].

Potansiyelin olduğu durumlarda başlangıç koşulu merkeze en yakın minimuma odaklanarak elde edilmiştir. Bunun için başlangıç koşulunda (2) $x_0 = \pi, y_0 = 0$ olarak seçilmiştir. Önceki çalışmalar maksimuma odaklanan solitonların güç koşullarını sağlamadığını ve kararsız olduğunu göstermektedir [1,3].

SOLİTONLARIN VARLIĞI

Bu bölümde, NLS ve NLSM yönetici denklemlerinin bir potansiyelin olduğu ve olmadığı durumlarda soliton çözümlerinin var olduğu gösterilmiş ve çözüm aralıklarının belirlendiği bant yapısı (band-gap) ortaya konmuştur.

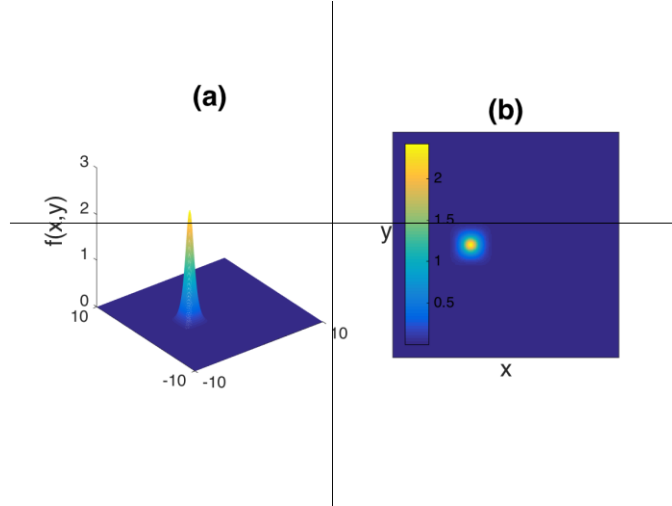
NLS denklemi ($\rho = 0$) ve NLSM sistemleri ($\rho = 0.5$ ve $\rho = 1$) için birinci doğrusal olmayan bant yapısı Şekil 2'de gösterilmiştir. Burada, SR yönteminde potansiyel derinliği V_0 sabit bir değer olarak seçilip yayılma sabiti μ artırılmaktadır. Yakınsaklığın sağlanamayıp soliton görüntüsün bozulmaya başladığı yer band ve gap arasında sınır olarak belirlenmiştir. Gap kısmı yakınsak çözüm elde edilen aralığı göstermektedir.



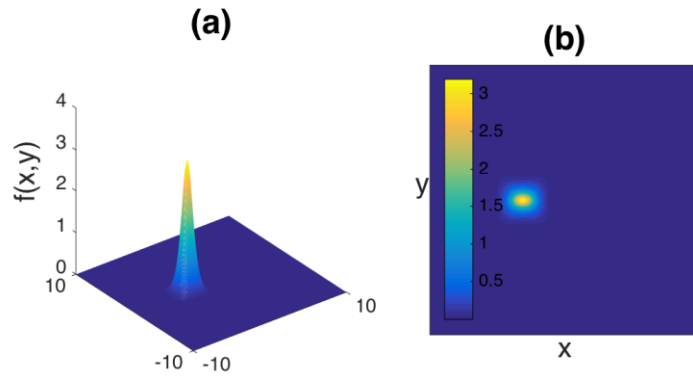
Şekil 2. NLS denklemi ve NLSM sistemi için bant yapıları.

Şekil 2’den görülebileceği gibi NLS denklemi ve NLSM sistemi için birinci doğrusal olmayan bant yapısı çok benzer özellikler taşımaktadır.

SR yöntemi kullanılarak, $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ için potansiyelin minimumuna odaklanan başlangıç koşuluyla elde edilen solitonlar sırasıyla Şekil 3 ve Şekil 4’te gösterilmiştir.



Şekil 3. NLS denkleminde ($\rho = 0$) periyodik potansiyelin minimumuna odaklanan temel solitonun (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü.



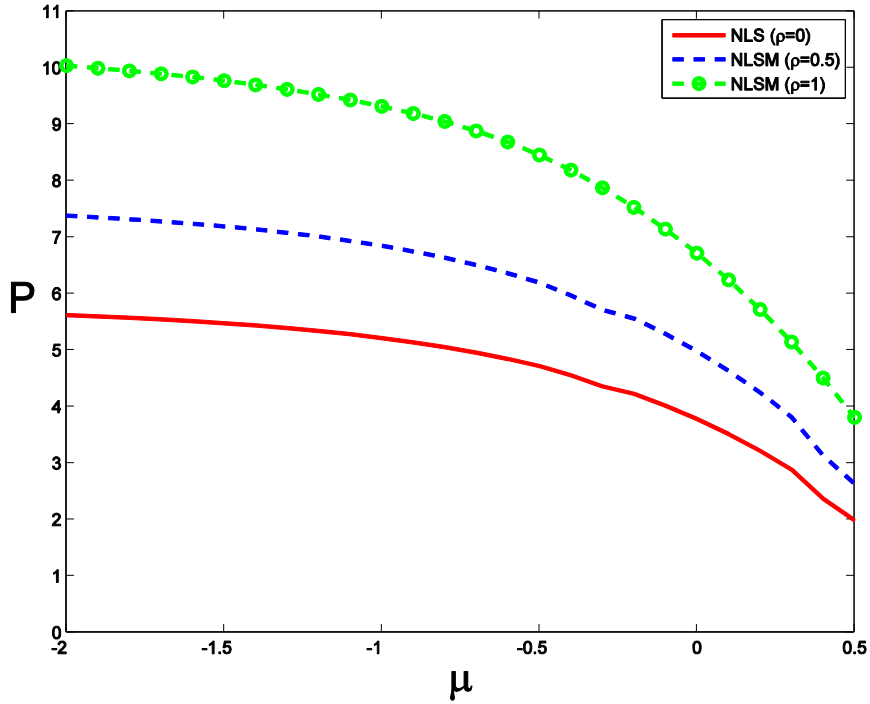
Şekil 4. NLSM sisteminde ($\rho = 1$) periyodik potansiyelin minimumuna odaklanan temel solitonun (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü.

Şekil 3 ve Şekil 4 karşılaştırıldığında benzer yapıya sahip iki temel solitonun elde edildiği görülmektedir. Burada göze çarpan önemli fark solitonların genlikleriyle ilgilidir, NLSM sistemi için elde edilen temel solitonun genliği, NLS denklemi için elde edilen solitonun genliğinden daha büyüktür.

Benzer şekilde $\rho = 0.5$ değeri ve potansiyelin olmadığı ($V_0 = 0$) durumlar için temel solitonlar elde edilmiştir.

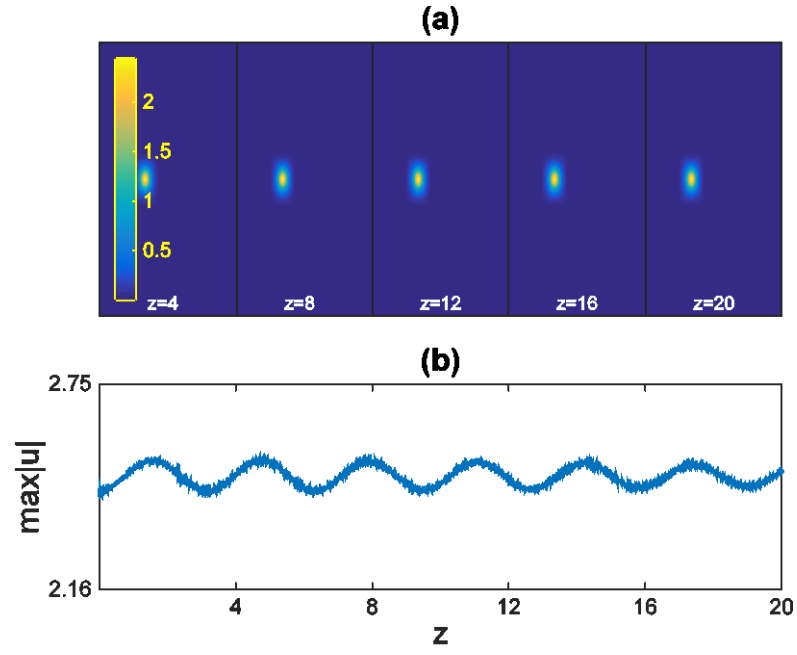
KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, NLS denklemleri ve NLSM sistemi için elde edilen solitonların doğrusal olmayan kararlılık analizi yapılmıştır. Solitonların ilerlemeye bağlı kararlılıkları incelenmeden önce soliton gücü analizi yapılmıştır (Bkz. Şekil 5).

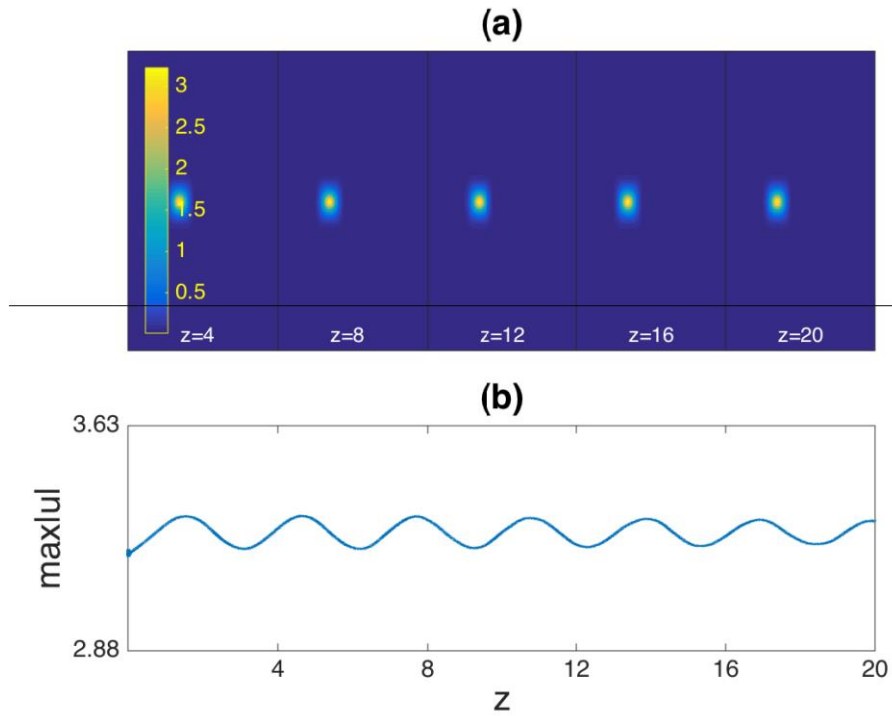


Şekil 5'teki güç analizi incelendiğinde, soliton gücünün her durum için özdeğere bağlı olarak azaldığı (eğim koşulunun sağlandığı) ve NLSM sistemleri için soliton gücünün NLS denklemlerine göre daha büyük olduğu görülmektedir.

Doğrusal olmayan kararlılık analizini gerçekleştirmek için temel solitonun şekli, potansiyel üzerindeki yeri ve en büyük genlik değeri ilerlemeye bağlı olarak gözlenmiştir. Şekil 3 ve Şekil 4'te elde edilen temel solitonların doğrusal olmayan kararlılıkları sırasıyla Şekil 6 ve Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 6: NLS denklemi ($\rho = 0$) için elde edilen temel solitonun ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

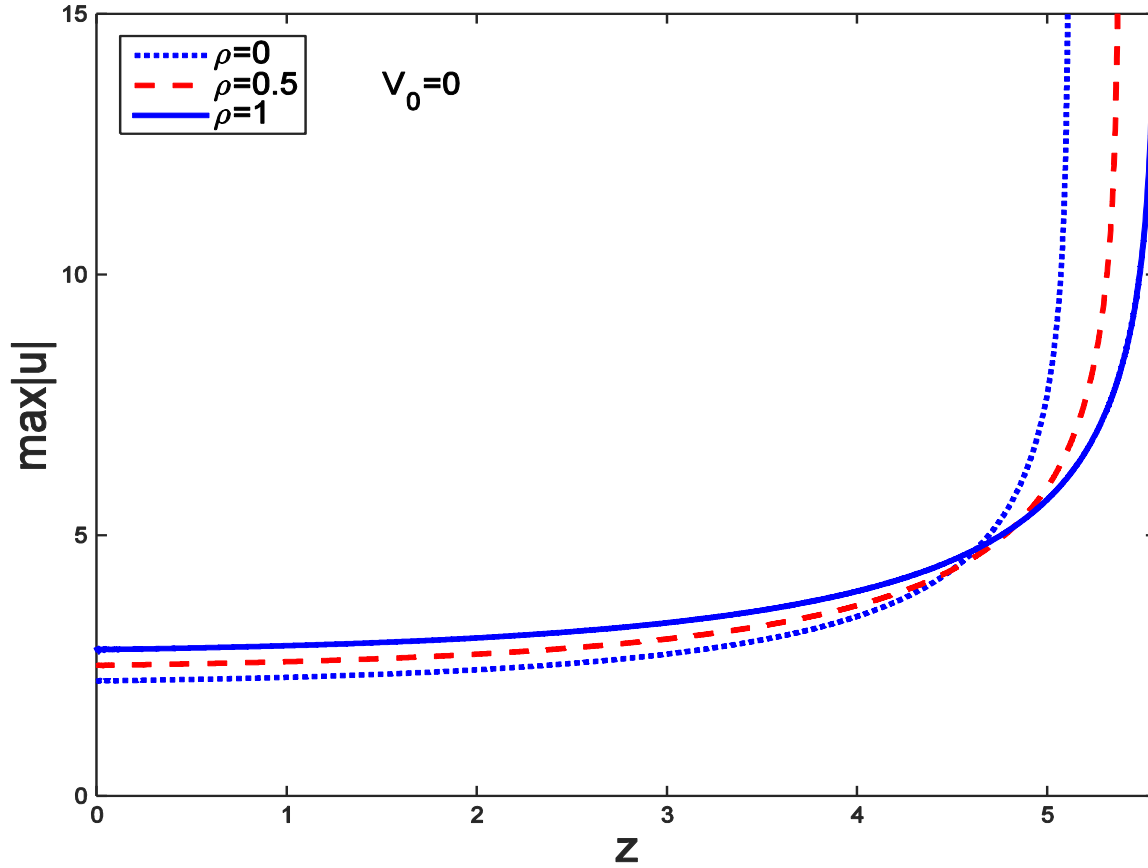


Şekil 7: NLS sistemi ($\rho = 1$) için elde edilen temel solitonun ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

Şekil 6 ve Şekil 7’de görüldüğü gibi, her iki durum için temel solitonun ilerleyişi sırasında potansiyel üzerindeki yeri ve fiziksel yapısı değişmemiş, en büyük genlik değeri çok küçük salınımlar yapmıştır. Bu durum, NLS denklemi ve NLSM sistemi için periyodik potansiyelin varlığında temel solitonun doğrusal olmayan kararlılığını göstermektedir.

Benzer şekilde NLSM sisteminde $\rho = 0.5$ değeri için de solitonun doğrusal olmayan kararlılığa sahip olduğu görülmüştür.

NLS denklemi ve NLSM sisteminde kararsız yapıları inceleyip karşılaştırmak için potansiyelin olmadığı ($V_0 = 0$) durumlar incelenmiştir. Şekil 8’de $\rho = 0$, $\rho = 0.5$ ve $\rho = 1$ için potansiyelin olmadığı durumda doğrusal olmayan kararlılık analizi yapılmıştır.



Şekil 8: NLS denklemi ($\rho = 0$) ve NLSM sistemleri ($\rho = 0.5, \rho = 1$) için elde edilen temel solitonun ilerleyişi sırasında en büyük genlik değeri.

Şekil 8’de görüldüğü gibi potansiyelin yokluğunda ele alınan her durumda solitonlar kararsızdır. Solitonların ilerleme mesafeleri göz önüne alındığında NLSM sistemleri için soliton genliğinin daha geç patladığı (blow-up) ve ρ değeri arttıkça bu mesafenin uzadığı anlaşılmaktadır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada NLS denklemi ve NLSM sistemleri için bir potansiyelin var olduğu ve olmadığı durumlar için temel solitonlar elde edilip kararlılık analizleri yapılmıştır. Elde edilen solitonların özellikleri karşılaştırılarak ikinci derece optik etkilerin soliton kararlılığı üzerindeki etkileri ortaya konmuştur.

NLS denklemi ve NLSM sistemi için birinci doğrusal olmayan bant yapısı çok benzer olmasına rağmen soliton güçleri arasında önemli fark olduğu (NLSM solitonlarının daha büyük güç değerlerine sahip olduğu) görülmüştür.

Potansiyelin var olduğu durumda NLS denklemi ve NLSM sistemi solitonların doğrusal olmayan kararlılığa sahip oldukları görülmüştür. Potansiyelin olmadığı durumda NLS ve NLSM modellerinden elde edilen solitonlar benzer özelliklere sahip olsa da aynı değişkenlerle elde edilen kararsız solitonlar için NLSM sistemi solitonlarının daha uzun ilerleme mesafesine sahip olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. Ilan, Band gap formation and fundamental solitons in complex 2D nonlinear lattices, *Physical Review A*. 81 (2010) 033834. doi:10.1103/PhysRevA.81.033834.
- [2] M.J. Ablowitz, B. Ilan, E. Schonbrun, and R. Piestun, Solitons in two-dimensional lattices possessing defects, dislocations and quasicrystal structures, *Physical Review E*. 74 (2006) 035601(R). doi:10.1103/PhysRevE.74.035601.
- [3] M. Bağcı, İ. Bakırtaş, N. Antar, Vortex and dipole solitons in lattices possessing defects and dislocations, *Optics Communications*. 331 (2014) 204-218. doi:10.1016/j.optcom.2014.06.005.
- [4] M.J. Ablowitz, Gino Biondini, and Steve Blair, Nonlinear Schrödinger equations with mean terms in non-resonant multidimensional quadratic materials, *Phys. Rev. E*. 63 (2001) 046605. doi:10.1103/PhysRevE.63.046605.
- [5] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. Ilan, Vortex and dipole solitons in complex two-dimensional nonlinear lattices, *Physical Review A*. 86 (2012) 033804. doi:10.1103/PhysRevA.86.033804.
- [6] M.J. Ablowitz, and Z.H. Musslimani, Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems, *Opt. Lett.* 30 (2005), 2140-2142. doi:10.1364/OL.30.002140.
- [7] M. Vakhitov and A. Kolokolov, Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation, *Radio Phys. Quant. Elec.* 16 (1973) 783. doi:10.1007/BF01031343.